Zur

Brechung und Dispersion des Lichtes

in den Metallen.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTEIDIGEN

am 31. Mai 1892

VON

Daniel Shea

aus Portsmouth, New-Hampshire.

OPPONENTEN:

Herr Cand. med. E. Allard.
- Cand. phil. T. See.
- Dr. phil. W. Bein.

Mit einer Tafel.

BERLIN.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke).

Linienstr. 158.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535713_0020

Meinem geliebten Vater

und dem

Andenken meiner theuren Mutter

gewidmet.

Einleitung.

1. Die von Cauchy[1]) entwickelte Theorie der Reflexion und Brechung des Lichtes ergiebt, dass das Snellius'sche Sinus-Gesetz nicht mehr gültig sein kann, sobald die betrachtete Substanz das Licht stark absorbirt. Jene Theorie, wie sie von Beer[2]), Eisenlohr[3]), Ketteler[4]) u. A. ausgeführt wurde, liefert das Resultat, dass das Brechungsverhältniss solcher Körper, stets noch definirt als $\frac{\sin i}{\sin r}$, eine Funktion des Einfallswinkels i ist. Die von Herrn von Helmholtz[5]) aufgestellte Theorie der Brechung und der Dispersion, welche als Grundlage die Annahme 1. von ponderablen, in den Aether eingelagerten und des Mitschwingens fähigen Atomen, die so dicht liegen, dass sie wie ein kontinuirliches Medium wirken, 2. von einer Kraft, die zwischen den ponderablen Atomen und denen des Aethers wirksam ist, 3. von einer Kraft zwischen den festliegenden und den bewegten Körpertheilchen, welche die letzteren nach ihrer Gleichgewichtslage zurücktreibt, 4. von einer Reibung der ponderablen Atome, welche ein Theil der von dem Aether herrührenden Energie vernichtet, hat, fordert ebenfalls, wie Wernicke[6]) und Kirchhoff[7]) bewiesen haben,

---

[1]) C. R. 7, p. 1050. 1838; 8, p. 41. 1839.
[2]) Pogg. Ann. 92, p. 402. 1854.
[3]) Pogg. Ann. 104, p. 337. 1858.
[4]) Verhandl. des Naturh.-Vereins der Rheinl. XXXII, 4. II p. 70.
[5]) Pogg. Ann. 154, p. 585. 1874.
[6]) Pogg. Ann. 159, p. 222. 1876.
[7]) Vorlesungen über Math. Optik 1891. p. 173.

eine Abhängigkeit des Brechungsverhältnisses vom Einfallswinkel, sobald die Absorption eine erhebliche ist.

2. Dass die Abhängigkeit der optischen Parameter der Metalle vom Einfallswinkel durch die Cauchy'sche Formel annähernd dargestellt wird, hat schon Jamin[8]) konstatirt. Die von Beer[9]) aufgestellte Formel wurde von Quincke[10]) mit dem von ihm angewandten Interferenzapparat geprüft; auch er gelangte zum Schlusse, dass die Brechungsverhältnisse der Metalle von der Incidenz abhängig sind und zwar mit wachsender Incidenz zunehmen. Später[11]) aber hielt er diese Anschauung für unrichtig, da die beobachteten Werthe für die Gangunterschiede zu unmöglichen, d. h. negativen Brechungsverhältnissen führten, wenn man nicht eine Phasenbeschleunigung bei dem Uebergang des Lichtes von Luft zum Metalle oder umgekehrt annimmt. Aus Bestimmungen des Brechungsverhältnisses von Silber, die auf Messungen der Absorption basirt wurden, schloss Wernicke[12]), dass die Abhängigkeit jenes von der Neigung, wenn überhaupt vorhanden, sehr gering sei. Dagegen glaubte Eisenlohr[13]) den Versuch Wernicke's als eine Bestätigung der Cauchy'schen Theorie betrachten zu können, und Voigt[14]) zeigte später, dass alle Folgerungen, welche Wernicke aus den Absorptionsmessungen bei normaler und schiefer Incidenz giebt, hinfällig sind. Weiter hat Herr Voigt[15]) bewiesen, dass Quincke's Beobachtungen mit seiner, Voigt's, Theorie übereinstimmen. Neuerdings haben die Herren du Bois und Rubens[16]) versucht, ohne sich auf eine

---

[8]) Ann. d. C. et d. P. 19, p. 296. 1847; 22, p. 311. 1848.

[9]) Pogg. Ann. 92, p. 412. 1854.

[10]) Pogg. Ann. 120, p. 599. 1863.

[11]) Pogg. Ann. 129, p. 187. 1871.

[12]) Pogg. Ann. 155, p. 87. 1875; 159, p. 223. 1876; Wied. Ann. 3, p. 133. 1878.

[13]) Wied. Ann. 1, p. 200. 1877.

[14]) Wied. Ann. 25, p. 95. 1885.

[15]) Wied. Ann. 25, p. 111.

[16]) Ber. Berl. Akad. XXXVIII, p. 955. 1890; Wied. Ann. 41, p. 507. 1890; Phil. Mag. 30 [5] p. 365. 1890.

optische Theorie zu stützen, mittelst der von Herrn Kundt entwickelten Prismenmethode zu den Beziehungen zu gelangen, welche zwischen i, dem Winkel in Luft, und i_m, dem Winkel im Metalle, bestehen müssen. In der That ergeben sich aus ihren Versuchen merkliche Abweichungen vom Snellius'schen Gesetz für die Metalle Ni, Fe und Co. Da die Beobachtungen von Herrn Kundt[17]) sicher gestellt haben, dass die Brechungsindices der Metalle Au, Cu und Ag bei normaler Incidenz kleiner als Eins sind, und Metalle mit kleinerem Brechungsindex nach den oben erwähnten Theorien sehr grosse Abweichungen vom Sinus-Gesetz ergeben sollten, erschien es besonders wünschenswerth, auch bei schiefem Durchgang des Lichtes unter Beibehaltung der Kundt'schen Methode Messungen mit diesen Metallen vorzunehmen. Im Folgenden erlaube ich mir, einige für die Metalle Au, Ag, Cu, Pt und Ni erhaltenen Resultate mitzutheilen, welche zum weiteren Ausbau der Theorie einen Beitrag liefern mögen.

---

[17]) Ber. Berl. Akad. 1888. p. 255 u. 1387; Wied. Ann. 34, p. 469. 1888, und 36, p. 824. 1889; Phil. Mag. [5] 26, p. 1. 1888.

Die Brechung.

Anordnung der Versuche.

3. Für diese Bestimmungen diente das grosse Pistor-Martin'sche Spektrometer, welches im Verlaufe der von Herrn Kundt und den Herren du Bois und Rubens damit ausgeführten Arbeiten manche Verbesserung erfahren hatte. Zur Bestimmung des Prismenwinkels wurde ein Gauss'sches Okular Abbé'scher Konstruktion benutzt, welches an Stelle des Fadenkreuzes einen Lichtspalt besass; zur Bestimmung der Ablenkung diente theils das Gauss'sche, theils ein Mikrometer-Okular mit parallelen Fäden. Die Einstellungen wurden, falls das Gauss'sche Okular benutzt wurde, durch Drehung der Alhidadenschraube des Spektrometerfernrohres gemacht. Es entsprach ein Trommeltheil der Alhidadenschraube einer Drehung der Fernrohrachse um 4.2″, ein Trommeltheil des Mikrometerokulars einer Drehung um 2.2″.

Die Prismenpräparate wurden nach den Angaben von Herrn Kundt angefertigt.

Prüfung der Methode.

4. Die zahlreichen Kontrollversuche, welche von Herrn Kundt und den Herren du Bois und Rubens schon angestellt worden sind, lassen nur wenige Einwände, welche gegen die Versuchsanordnung erhoben werden könnten, unberücksichtigt. Daher habe ich mich mit einer geringen Zahl von weiteren Kontrollmessungen begnügen können.

5. In erster Linie wurde das von Herrn Kundt angewandte Kollimirverfahren[1]) auch hier bei schiefem Durchgang des Lichtes geprüft, in der nämlichen Weise, in welcher die Herren du Bois und Rubens das Verfahren bei normaler Incidenz schon geprüft haben[2]). Eine vorzügliche planparallele Platte von Herrn Brashear in Alleghany-City, Amerika, und mehrere mittelst des Gauss'schen Okulars ausgesuchte platinirte Glasstückchen wurden nach den Angaben[3]) von Herrn Kundt genau so wie die Prismenpräparate mit schwarzem Lack bemalt, d. h. so, dass nur zwei (innere) Fenster, welche den Biprismen der wirklichen Prismenpräparate entsprachen, und zwei seitliche (äussere) Fenster frei blieben. (Für nähere Erläuterung siehe die Abhandlung[4]) von du Bois und Rubens, und Fig. 1 der dazu gehörigen Tafel.) An den so präparirten Platten wurden genau die nämlichen Messungen vorgenommen, wie an den Metallprismen. Eine von diesen Platten wurde vertikal auf dem Spektrometertischchen befestigt. Mittelst der vorhandenen Kreistheilung konnte der Plattennormale jede beliebige Neigung rechts oder links von der Fernrohrachse gegeben werden. Bei Neigungen von 0^0, 10^0, 20^0 . . . . wurde die Kollimirung in der von Herrn Kundt vorgeschriebenen Weise[5]) ausgeführt. Nach der Kollimirung, d. h. wenn die Spaltbilder von den äusseren Fenstern genau an derselben Stelle des Gesichtsfeldes waren, ergaben die beiden inneren Fenster scheinbare Ablenkungen, die in der folgenden Tabelle zusammengestellt sind. Die Zahlen sind die Mittel der bei gleichen Neigungen der Plattennormale nach links und rechts erhaltenen.

Man sieht, dass das platinirte Glas gegenüber dem planparallel geschliffenen ein sehr befriedigendes Verhalten ergiebt.

---

[1]) Wied. Ann. 36, p. 828. 1889.
[2]) Ber. Berl. Akad. XXXVIII, p. 956. 1890.
[3]) Wied. Ann. 36, p. 828. 1889.
[4]) Ber. Berl. Akad. XXXVIII, p. 956. 1890.
[5]) Wied. Ann. 36, p. 828. 1889.

Die Platte A diente als Unterlage für das Jodsilber-Prisma (S. 11), die Platte B für das Cu (3)-Prisma (S. 16).

Tabelle 1.

Incidenz		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°
Planparallel. Glas		−0″.33	− 0.40	+ 0.17	+ 0.31	− 0.10	+ 0.12	+ 0.24	+ 0.44
Platin. Glas	A	+ 0.91	− 0.08	+ 0.51	+ 1.20	− 0.34	+ 0.78	+ 1.98	+ 1.75
	B	+ 1.33	+ 1.07	+ 1.03	+ 2.00	+ 1.74	+ 0.90	+ 1.37	+ 1.47

6. Es ist von verschiedenen Seiten[6]) der a priori nicht unberechtigte Einwand erhoben worden, dass das optische Verhalten derartig dünner Schichten nur mit Vorsicht zu interpretiren sei, indem die Schwingungszustände gewissermaassen aus Raummangel nicht in normaler Weise sich ausbreiten können. Behufs Entkräftigung dieses Einwandes habe ich Beobachtungen an Prismen von Ag J angestellt, eine Substanz, für die in dicken Schichten das Sinusgesetz Gültigkeit hat. Von mehreren Ag J-Prismen, welche durch die Jodirung von sehr dünnen Silberprismen erhalten wurden, habe ich einige auswählen können, deren Dicke, ausgedrückt in Wellenlängen in der Substanz, mit der Dicke der benutzten Metallprismen vergleichbar war. Um zu entscheiden, ob das Sinusgesetz gültig ist, müssen Werthe für die Ablenkungen nach diesem Gesetz berechnet werden.

7. Man bezeichnet durch β den brechenden Winkel, durch i den Einfallswinkel, durch i′ den Austrittswinkel, durch r und r′ die entsprechenden Winkel in der Substanz, durch α die durch das Prisma hervorgerufene Ablenkung des Strahles, und durch n das Verhältniss sin i/sin r. Dann sind

[6]) U. a. von Lord Calvin und Herrn O. Lodge während der Diskussion in der Sektion A der Brit. Ass. zu Leeds am 4. Sept. 1890. Auch von Eisenlohr siehe Wied. Ann. 1, p. 204, 1877.

$\sin i = n \sin r$; $\sin i' = n \sin r'$, und $\alpha = i + i' - \beta$. Aus diesen Ausdrücken erhält man die Gleichung

$$n^2 = \frac{\sin^2 i + \sin^2(\alpha + \beta - i) + 2 \sin(\alpha + \beta - i) \cos \beta \sin i}{\sin^2 \beta} \quad (1)$$

welche in der Form

$$\sin(\alpha + \beta - i) + \cos \beta \sin i = \sin \beta \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \quad . \quad (2)$$

geschrieben werden kann, und aus dieser leitet man die für α explicite Gleichung

$$\sin \alpha = -\sin(\beta - i) \sqrt{\left\{1 - (\cos \beta \sin i - \sin \beta \sqrt{n^2 - \sin^2 i})^2\right\}}$$
$$- \cos(\beta - i)(\cos \beta \sin i - \sin \beta \sqrt{n^2 - \sin^2 i}) \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

Es ist hier ein für allemal zu bemerken, dass die für einfache Prismen abgeleitete Gleichung ohne Weiteres auf die untersuchten Biprismen ausgedehnt werden kann. Demgemäss wurde die Gleichung I zur Berechnung von α angewendet. Der benutzte Werth von n ist das Mittel aus den bei $0^0 \ldots 70^0$ Neigungen gefundenen Werthen, welche mit Hülfe der Gleichung (2) berechnet worden sind.

Tabelle 2.

Incidenz		0^0	30^0	50^0	70^0
Jodsilber	n	2.43	2.42	2.42	2.51
$\beta = 19.74''$	α beobachtet	$+28''.4$	$+34.3$	$+51.0$	$+113.4$
$n = 2.44$	α berechnet	$+28.4$	$+34.8$	$+51.5$	$+110.6$
$\lambda = 64 \times 10^{-6}$ c. m.					

Auf Grundlage dieser für ein solches Prisma erhaltenen Zahlen kann man den Schluss ziehen, dass dünne Prismen von Substanzen mit geringen Absorptionskoefficienten sich in Bezug auf die Ablenkung des Lichtes ebenso verhalten, wie dickere es thun würden.

8. Kürzlich hat Herr Mascart[7]) den Einwurf gemacht: „Mais il peut arriver, et c'est probablement le cas des expériences de M. Kundt avec des prismes métalliques très aigus, que les changements de phase par lesquels on traduit l'effet des surfaces soient variables avec l'épaisseur traversée par la lumière .... on peut avoir une idée du résultat si l'on suppose que l'effet des deux surfaces est proportionnel à leur distance, ou à l'épaisseur du milieu, ce qui équivaut à une modification apparante de l'angle du prisme.“ Aus erweiterten Betrachtungen schliesst er, dass die Resultate der Methode der prismatischen Ablenkungen bei so dünnen Schichten als unzulässig bezeichnet werden müssen. Um diesem Einwand zu begegnen, braucht man nur einige Stellen von Herrn Kundt's Abhandlungen anzuführen. Erstens[8]) verschafft er sich auf drei verschiedene Weisen die Sicherheit, dass die brechenden Winkel der benutzten Prismen richtig gemessen wurden. Zweitens[9]) hat er bewiesen, dass, wenn die Prismen in verschiedene Medien gebracht wurden, die Aenderungen der Ablenkung den Brechungsexponenten dieser Medien entsprechend waren. Damit ist der Beweis geliefert, dass die von Herrn Kundt gefundenen Werthe von den Brechungsexponenten wirklich die Geschwindigkeit des Lichtes in den Metallen geben, dass also variable Phasenänderungen weder die Messungen der brechenden Winkel noch die der Ablenkung gefälscht haben.

9. Es könnte ferner der freilich viel unwahrscheinlichere Einwand erhoben werden, dass bei schiefem Durchgang des Lichtes auch eine planparallele dünne Metallschicht im Stande wäre, den auffallenden Strahl aus seiner Richtung abzulenken. In diesem Falle wären die an den Metallprismen beobachteten Werthe natürlich mit Fehlern behaftet. Dieses Bedenken kann aber als vollkommen beseitigt gelten, da ex-

[7]) Traité d'optique, 2. p. 560—565, Paris 1891.
[8]) Wied. Ann. 34, p. 479. 1888.
[9]) Wied. Ann. 34, p. 481. 1888.

perimentell genau festgestellt wurde, dass eine planparallele Silberschicht, die chemisch auf einer geschliffenen Glasplatte niedergeschlagen, eine Ablenkung nicht verursachte.

10. Hätte das Snellius'sche Gesetz auch für absorbirende Körper Geltung, so müsste totale Reflexion in Silber, Gold und Kupfer schon bei geringeren Neigungen eintreten. Dass dieses nicht der Fall ist, haben schon Herr Quincke[10]) und die Herren du Bois und Rubens[11]) bemerkt. Um mich davon zu überzeugen, dass sie auch bei Incidenzen bis nahezu 90°, bei welchen Ablenkungsbeobachtungen an den Prismen aus anderen Gründen nicht vorgenommen werden konnten, nicht eintritt, wurden die folgenden Versuche ausgeführt. Eine geschliffene Glasplatte, etwa 20 cm lang und 4 cm breit, wurde nach chemischem Verfahren mit einer sehr dünnen, homogenen und kohärenten Silberschicht bedeckt. Diese Platte wurde mit der Schmalseite vertikal auf dem Spektrometertisch befestigt und durch schwarze Schirme derart abgeblendet, dass alles Licht, welches an das Objektiv des Fernrohres gelangte, erst die Silberschicht passiren musste und alsdann die Glasschicht. Bei einer Neigung von 89° 20′ war das Silber noch durchsichtig, Schichten von Gold und Kupfer, elektrolytisch auf platinirtes Glas niedergeschlagen, waren ebenfalls bei 85° noch durchsichtig.

11. In diesem Zusammenhang darf es erwähnt werden, dass ausführliche Untersuchungen hinsichtlich der Brechung an Prismen aus Gold, Silber, Kupfer und Platin unter dem Benutzen von geradlinig polarisirtem Lichte vorgenommen wurden. Das einfallende Licht wurde durch ein Nicols'sches Prisma parallel geneigt und senkrecht zur brechenden Kante polarisirt. In keinem Falle war eine Aenderung der Ablenkung durch Brechung wahrzunehmen. Ferner wurden Prismen aus Eisen, Kobalt und Nickel zwischen die Pole eines Rühnkorff'schen Magneten in der Weise gestellt, dass die

---

[10]) Pogg. Ann. 120, p. 600, 1863.

[11]) Ber. Berl. Akad. XXXVIII, p. 10, 1890.

magnetischen Kraftlinien der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes in den Metallen parallel waren. Messungen der Brechung wurden dann bei Anwendung von gewöhnlichem und auch geradlinig polarisirtem Lichte angestellt, indem der Magnet erregt wurde. Mittelst geeigneter Einrichtung konnte die Stärke des magnetischen Feldes zwischen 2000 und 12000 c. g. s.-Einheiten variirt werden. In allen Fällen war die Ablenkung des durchgehenden Lichtes genau die nämliche, welche sich unter Benutzung von gewöhnlichem Lichte ohne Erregung des Magnets ergab.

Herstellung der Metallprismen.

12. Wie schon oben bemerkt, wurden die Prismen nach den Angaben von Herrn Kundt hergestellt, und zwar die von Gold, Silber, Nickel und Kupfer durch elektrolytische Zersetzung von cyanhaltigen Lösungen, die Platinprismen dagegen durch Zerstäuben eines Platinbleches. Die Methoden von Herrn Kundt sind an den erwähnten Stellen hinreichend ausführlich angegeben, so dass eine Beschreibung hier umgangen werden kann. In Betreff der Anfertigung der Platinprismen aber möchte ich einiges hinzufügen. Am sichersten führt die folgende Methode zum Ziel: Man erhitzt mittelst des elektrischen Stromes einen Streifen Platinblech, welcher über einem Stückchen Spiegelglas derart befestigt wird, dass die Ebene des Bleches senkrecht auf der Glasfläche steht, ohne das Glas zu berühren. Das Zerstäuben eines Streifens von 4 mm Breite und etwa $^1/_{50}$ mm Dicke durch einen Strom von 20 Ampère ist bereits so erheblich, dass bei einer Entfernung von $^1/_2$ mm eine doppelte keilförmige Schicht von hinreichender Dicke innerhalb einer halben Stunde auf dem Glase sich bildet. Ohne geeignete Kühlvorrichtung würde bei dieser geringen Entfernung das Glas gleich zerspringen; man verhütet dieses am besten durch Auflegung des Glases auf einen kleinen wasserdichten Kupferblechkasten, welcher durch Wasserspülung auf konstanter niedriger Temperatur erhalten wird. Die in dieser Weise gewonnenen Niederschläge

bestehen zum grössten Theil aus Platinoxyd, das sich aber leicht reducirt, wenn man den Niederschlag im Sandbad bis auf 200° C. erwärmt und dann mit dem Reduktionskegel der Bunsenflamme darüber hinfährt. Bei zu raschem Verfahren löst sich das Platin ab. Die Schwierigkeiten der Herstellung sind bei den einzelnen Metallen ausserordentlich verschieden; ich möchte hierzu nur bemerken, dass sich unter 20 Prismen von Kupfer, Nickel und Platin ein brauchbares ergiebt, während sich bei Silber und Gold kaum unter 200 der hergestellten ein brauchbares befindet.

Die Messungen.

13. Zunächst wurden Fernrohre und Kollimator für paralleles Licht genau eingestellt; dann wurde untersucht, ob die äusseren Fenster des Prismenpräparats bei der Kollimirung verschiedene Einstellungen hinsichtlich der reflektirten bezw. der durchgehenden Strahlen ergeben, da man es anderenfalls nicht mit vollkommen ebenem Glas zu thun hat. Alsdann erfolgten die Messungen des brechenden Winkels, nachdem die Bilder vor den Fenstern in genaue Uebereinstimmung gebracht worden sind; darnach wurden die Ablenkungen der durch die Prismen gehenden Strahlen bei normaler und schiefer Incidenz bis zu 65° oder 70° bestimmt. Zu den Messungen der Ablenkung diente als Lichtquelle ein Zirkonbrenner mit vorgeschobener Linse, in deren Brennpunkt sich der Kollimatorspalt befand. Direkt vor dem Spalt stand ein rothes Glas, welches Licht durchliess, dessen mittlere Wellenlänge etwa 6×10^{-6} c. m. betrug.

14. Wegen der sehr grossen Schwierigkeiten der Herstellung brauchbarer keilförmiger Schichten musste ich mich mit einer geringen Anzahl Prismen aus jedem Metalle begnügen. In der folgenden Tabelle sind die Resultate für alle Prismen niedergelegt. Jede Zahl ist das Mittel aus vier Bestimmungen der zu messenden Grösse und jede von diesen Bestimmungen umfasst 20 Ablesungen bei Neigungen rechts resp. links, daher entspricht jede der Zahlen der Tabelle

Tabelle 3.

No.	β		Incidenz 0°	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°
			Gold									
1	16″.25		— 10″.5	— 10.6	— 10.5	— 9.3	— 6.7	— 5.2	—	— 7.8	—	—
2	16.76	α	— 13.4	— 13.9	— 15.6	— 17.3	— 17.1	— 17.3	—	— 13.9	—	—
3	28.08		— 21.0	— 19.5	— 19.4	— 20.2	— 18.7	— 19.4	—	— 18.1	—	—
4	41.83		— 30.8	— 24.4	— 27.9	— 30.5	— 30.0	— 20.6	—	— 17.3	—	—
			Silber									
1	13.31		— 10.8	— 7.9	— 7.1	— 4.7	— 3.6	— 3.2	—	— 1.2	—	—
2	15.37	α	— 11.6	— 11.7	— 10.9	— 10.7	— 8.8	— 8.7	—	— 8.4	—	—
3	18.52		— 15.1	— 12.0	— 9.9	— 8.7	— 6.1	— 6.0	—	— 2.6	—	—
4	25.28		— 19.2	— 18.0	— 14.7	— 16.5	— 15.2	— 12.7	—	— 10.4	—	—
			Kupfer									
1	29.06		— 17.3	—	— 16.5	— 14.1	— 13.4	— 9.7	—	— 5.9	—	+ 0.7
2	34.48	α	— 17 5	—	— 12.9	— 14.7	— 11.2	— 6.8	—	— 3.9	—	+ 19.0
3	37.50		— 20.6	—	— 19.9	— 16.3	— 12.6	— 6.8	—	— 3.2	—	+ 12.3
			Nickel									
1	16.59		+ 17.6	—	—	+ 21.9	+ 27.5	+ 33.6	+ 47.0	+ 55.0	+ 59.6	—
2	23.63	α	+ 18.5	—	—	+ 24.6	+ 29.8	+ 37.7	+ 46.4	+ 58.7	+ 73.3	—
3	50.15		+ 53.1	—	—	+ 71.5	+ 87.7	+ 109.9	+ 127.5	+ 160.2	+ 196.8	—
			Platin									
1	19.15		+ 19.6	—	—	+ 24.1	+ 30.9	+ 41.0	+ 48.2	+ 55.5	+ 61.4	—
2	21.63	α	+ 23.2	—	—	+ 26.5	+ 34.3	+ 46.6	+ 56.0	+ 66.4	+ 79.8	—
3	24.82		+ 23.4	—	—	+ 27.0	+ 34.8	+ 51.9	+ 57.9	+ 77.8	+ 91.3	—

80 Ablesungen. Bei jeder Neigung wurde die endgültige Kolimirung durch 20 Ablesungen geprüft. Die Bedeutung von α und β ist schon in § 7 angegeben.

Theoretisches.

15. Um die Resultate mit den Ergebnissen der Theorien vergleichen zu können, bedienen wir uns am besten des folgenden Verfahrens. Wir wollen uns vorläufig auf die Theorie von Herrn von Helmholtz stützen. Aus dieser Theorie werden wir die für die Ablenkung α explicite Gleichung herleiten, und aus dieser Gleichung die numerirten Werthe von α berechnen, welche den gegebenen Werthen von i entsprechen.

Bezeichnungen.

16. Das für die stark absorbirenden Substanzen variable Brechungsverhältniss ν soll durch die Gleichung $\frac{\sin i}{\sin r}$ definirt werden, wo i den Einfallswinkel, unter welchem das Licht in das absorbirende Medium eintritt, und r den entsprechenden Winkel im Medium bedeutet. Für normale Incidenz wird der Werth von ν durch n_0 bezeichnet werden. Man nennt n_0 den Brechungsindex. Durch g soll der Extinktionskoefficient bezeichnet werden[12]). Endlich soll β den Prismenwinkel und α

[12]) Um die Bedeutung von g klar darzustellen, darf Folgendes hinzugefügt werden: Die Absorption ist eine Verkleinerung der Amplitude der Oscillationen der Aethertheilchen. Ist die Amplitude des auffallenden Lichts gleich A_0 und dA die Abnahme der Amplitude, verursacht durch die Schicht dx des absorbirenden Körpers, so wird $\frac{dA}{A \cdot dx}$ gleich einer Konstanten sein, welche von verschiedenen Forschern mit $(-p)$, $(-k)$, $(-\varrho)$ bezeichnet worden ist. Bezeichnen wir sie mit $(-k)$, so wird $\frac{dA}{A_0} = -k\,dx$. Durch Integration erhält man $\log_e A_x = k\,x + C$, wo $C = \log_e A_0$ ist. Also wird

$$\log_e \frac{A_x}{A_0} = -k\,x.$$

die durch das Prisma verursachte Ablenkung des Lichtes bedeuten.

17. Zunächst ergiebt sich aus der Helmholtz'schen Theorie, wie schon Wernicke[13]) und Kirchhoff[14]) bewiesen haben:

$$2\,\nu^2 = n_0^2 - g^2 + \sin^2 i + \sqrt{4\,n_0^2\,g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2} \quad (3)$$

Wenn nun β sehr klein ist, gilt die Gleichung I (§ 7) auch für absorbirende Körper, wofern an Stelle von n dieser Ausdruck für ν eingesetzt wird. Denn aus den Gleichungen (§ 6) $\sin i_1 = \nu_1 \sin r_1$ und $\sin i_2 = \nu_2 \sin r_2$ für ein Doppelprisma der absorbirenden Substanz ergiebt sich $\nu_1 = \nu_2 + \varepsilon$, wo ε verschwindend klein ist, da der Winkel i_1 nur sich von dem Winkel i_2 um eine Grösse von der Ordnung β unterscheidet. Man erhält für absorbirende Körper, wenn man obige Substitution ausgeführt hat, die in α explicite Gleichung

---

Daraus erhält man $A_x = A_0\, e^{-kx}$. Durch Quadriren erhält man die Masse der Intensität $I_x = I_0\, e^{-2kx}$. Ist nun x gleich der Längeneinheit, so ist k der Bruchtheil des Lichtes, welcher pro Längeneinheit absorbirt wird, und er hat die Dimensionen $[L^{-1} M^0 T^0]$. Setzt man nun $k = \frac{2\pi}{\lambda} g$, wo λ die Wellenlänge in Vacuo bedeutet, so ist g eine mit λ variable Grösse, welche die Dimensionen $[L^0 M^0 T^0]$ hat. Es wird dann

$$I_x = I_0\, e^{-\frac{4\pi}{\lambda} g},$$

wo $2\pi g$ der Bruchtheil des Lichtes ist, welcher auf der Strecke λ verloren geht. Beer (Pogg. Ann. 92, p. 404) und Rathenau (Inaugural-Dissertation, Berlin 1889) wenden für g den Namen Extinktionskoefficienten an, während Wernicke (Pogg. Ann. Erg.-Bd. VIII p. 67) ihn den Extinktionsindex nennt. Rubens (Wied. Ann. 37, 1889, p. 267) bezeichnet den Extinktionskoefficienten mit k. Wüllner (Exp. Phys. Bd. 2, p. 126 bis 135) braucht $\varkappa = g$, welchen er Absorptionskoefficienten nennt. Nach der Voigt'schen Theorie (Wied. Ann. 23, p. 109, 113, 132) ist $g = n\varkappa$, wo n den Brechungsindex und $\varkappa$ den Absorptionsindex bedeuten.

[13]) Pogg. Ann. 159, p. 198, 1876.

[14]) Math. Optik. Leipzig 1891, p. 173—177.

$$\sin\alpha = -\sin(\beta - 1)\sqrt{\left\{1 - \left(\cos\beta\sin i - \sin\beta\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[n_0^2 - g^2 - \sin^2 i + \sqrt{4\,n_0^2\,g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2}\right]\right\}^2}\right\}}$$

$$-\cos(\beta - i)\left(\cos\beta\sin i - \sin\beta\sqrt{\left\{\frac{1}{2}\left[n_0^2 - g^2 - \sin^2 i + \sqrt{4\,n_0^2\,g^2 + (n^0{}_2 - g^2 - \sin^2 i)^2}\right]\right\}}\right) \quad . \quad . \quad \text{(Ia)}$$

Da die Durchführung der Rechnung nach dieser Formel nicht gerade bequem ist, werden wir versuchen, einen einfacheren Ausdruck zu finden.

18. Aus der Gleichung (2), Seite 11, erhält man unmittelbar

$$\sin\alpha\cos\beta = \sin\beta\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \cos\alpha\sin\beta$$

$$-(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta + \cos\beta)\tan i \quad . \quad . \quad (4)$$

Da α und β nur wenige Sekunden betragen, darf man $\cos\alpha$ und $\cos\beta$ gleich Eins setzen. Es wird dann

$$\sin\alpha = \sin\beta\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \sin\beta - (\sin\alpha\sin\beta)\tan i.$$

Das Glied $\sin\alpha\sin\beta\tan i$ bleibt sehr klein gegen $\sin\alpha$ bis i sich 90^0 nähert; daher darf man als Annäherungsformel schreiben

$$\sin\alpha = \sin\beta\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - \sin\beta$$

oder wenn man an die Stelle von $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ die Winkel α bezw. β einsetzt, so wird

$$\alpha = \beta \left(\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\cos i} - 1 \right)^{15)} \quad . \quad . \quad . \quad (4a)$$

Die mit Hülfe von (4a) berechneten Werthe von α werden alle zu gross sein, bis zur Incidenz von 65° nur wenige Sekunden, bei 90° allerdings um unendlich viel. Lässt man nun an Stelle von n in (4a) den Ausdruck für ν in (3) treten, so erhält man

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \left(\sqrt{\left\{ \frac{1}{2} \left[n_0^2 - g^2 - \sin^2 i + \sqrt{4 n_0^2 g^2 + (n_0^2 - g^2 - \sin^2 i)^2} \right] \right\}} \right) - 1 \right\} \quad (II)$$

welche α als Funktion bekannter Grössen explicite darstellt, also die Berechnung der numerischen Werthe gestattet, welche ebenfalls etwas gross ausfallen werden.

19. Die Gleichung (II), nach welcher die Berechnung des Werthes von α immer noch sehr mühsam ist, lässt sich in folgender Weise vereinfachen. Durch Addition und Subtraktion der Grösse

$$\left(\frac{2 \sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} + \frac{\sin^4 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2} \right)$$

unter dem ersten Quadratwurzelzeichen geht sie über in

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{1}{\cos i} \sqrt{\left(n_0^2 \left\{ 1 - \frac{\sin^2 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right\}^2 \right.} \right. \quad (5)$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left[\frac{2 \sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} - \frac{\sin^4 i}{2 n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} - \sin^2 i - n_0^2 (1 + g^2/n_0^2) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sqrt{n_0^4 (1 + g^2/n_0^2)^2 - 2 n_0^2 \sin^2 i + 2 n_0^2 (g^2/n_0^2) \sin^2 i + \sin^4 i} \right] \right) - 1 \Bigg\}$$

[15]) du Bois und Rubens. Ber. Berl. Akad. XXXVIII p. 5. 1890.

Nun setzt man $(+2n_0^2\sin^2 i)$ an die Stelle $(-2n_0^2\sin^2 i)$[16]) unter dem zweiten Quadratwurzelzeichen in (5) ein, oder addirt man $4n_0^2\sin^2 i$, so erhält man die Gleichung

$$\alpha = \beta\left\{\frac{1}{\cos i}\sqrt{\left(n_0^2\left\{1-\frac{\sin^2 i}{2n_0^2(1+g^2/n_0^2)}\right\}^2\right.}\right.$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{2\sin^2 i}{1+g^2/n_0^2}\left(1-\frac{\sin^2 i}{4n_0^2(1+g^2/n_0^2)}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1+g^2/n_0^2}{2}-\frac{n_0^2(1+g^2/n_0^2)^2}{2\sin^2 i}\right)\right]$$
$$\left.+\sqrt{\frac{n_0^4(1+g^2/n_0^2)^4}{4\sin^4 i}+\frac{n_0^2(1+g^2/n_0^2)^3}{2\sin^2 i}+\frac{(1+g^2/n_0^2)^2}{4}}\right)\Bigg]\Bigg)-1\Bigg\}$$

Diesen Ausdruck kann man ohne Weiteres auf die Form

$$\alpha = \beta\left\{\frac{1}{\cos i}\sqrt{\left(n_0^2\left\{1-\frac{\sin^2 i}{2n_0^2(1+g^2/n_0^2)}\right\}^2\right.}\right.$$
$$\left.+\left[\frac{\sin^2 i}{1+g^2/n_0^2}\left(1-\frac{\sin^2 i}{4n_0^2(1+g^2/n_0^2)}\right)\right]\right)-1\Bigg\} \qquad (6)$$

und wenn man

$$\frac{\sin^2 i}{1+g^2/n_0^2}\left(1-\frac{\sin^2 i}{4n_0^2(1+g^2/n_0^2)}\right)$$

gleich Null setzt[17]), so wird

---

[16]) Es beträgt die Grösse $4n_0^2\sin^2 i$ bei Silber nur etwa $1/5000$, bei Gold $1/250$, bei Kupfer $1/70$, bei Platin $1/40$, bei Nickel $1/25$ des Gesammtwerthes des Ausdruckes unter diesem Wurzelzeichen.

[17]) Der Betrag

$$\frac{\sin^2 i}{1+g^2/n_0^2}\left(1-\frac{\sin^2 i}{4n_0^2(1+g^2/n_0^2)}\right)$$

ist etwa $1/60$ des Gesammtwerthes unter dem Wurzelzeichen bei Silber und $1/30$ bei Nickel.

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{2\, n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) - 1 \right\} \quad \text{(III)}$$

Diese Gleichung giebt die berechneten Werthe von α algebraisch zu klein. Bezeichnet man nämlich die Differenz zwischen den hinzugefügten und abgezogenen Grössen

$$\left\{ \frac{\sin^2 i}{1 + g^2/n_0^2} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{4\, n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)} \right) \right.$$

$$- [\sqrt{n_0^4 (1 + g^2/n_0^2)^2 + 2\, n_0^2 \sin^2 i + 2\, n_0^2 g^2/n_0^2 \sin^2 i + \sin^4 i}$$

$$\left. - \sqrt{4\, n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2 + 2\, n_0^2\, g^2/n_0^2 \sin^2 i - 2\, n_0^2 \sin^2 i + \sin^4 i}] \right\}$$

mit d, so ergiebt sich, dass d annähernd gleich dem Ausdruck

$$\frac{3 \sin^4 i}{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)}$$

ist, d. h., die abgezogene Grösse ist ein wenig grösser als die hinzugefügte. Demgemäss unterscheiden sich die Werthe von α nach (II) und nach (III) um eine Grösse, die kleiner als

$$\frac{3 \beta \sin^4 i}{n_0^2 (1 + g^2/n_0^2)^2}$$

sein muss. Wenn man aber das letzte Glied des Ausdruckes unter dem Quadratwurzelzeichen in Gleichung (6) nicht gleich Null setzt, so reducirt sich (6) sofort auf

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n}{\cos i} - 1 \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(IV)}$$

Die Helmholtz'sche Theorie ergiebt also schliesslich vier Gleichungen, welche die Berechnung von α gestatten, und zwar (Ia) die strenge Gleichung, (II) und (III) bedeutend vereinfachte Gleichungen, von denen die erstere zu grosse,

die letztere zu kleine Werthe von α geben, die aber noch bei beträchtlichen Werthen von i nicht wesentlich von denen mit Hülfe von (Ia) berechneten verschieden sind; und (IV) ein sehr einfacher Ausdruck, der für Metalle mit grossem g und kleinem n_0 in erster Annäherung gilt.

20. Aus der Voigt'schen Theorie hat schon Herr Drude[18]) die Gleichung

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} \left(1 - \frac{\sin^2 i}{2\, n_0^2 (1 + \varkappa^2)} \right) - 1 \right\}$$

zur annähernden Berechnung von α abgeleitet und auf die Beobachtungen der Herren du Bois und Rubens[19]) am Eisen, Nickel und Kobalt angewendet. Diese Gleichung ist mit der Gleichung (III) identisch, da nach Herrn Voigt[20]) $n_0 \varkappa = g$ ist, und wie Herr Drude gezeigt hat, darf sie in der einfacheren Form

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} - 1 \right\}$$

geschrieben werden, wenn der Werth des Ausdrucks $2 n^2_0 (1 + \varkappa)$ beträchtlich ist. Diese Form ist aber mit (IV) identisch. Die Gleichung (IV) lässt sich auch aus der Beer'schen Entwicklung der Cauchy'schen Theorie herleiten. Als annähernde Formel zur Berechnung von ν hat Beer[21]) die Gleichung

$$\nu^2 = n_0^2 + \sin^2 i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

aufgestellt. Wenn man diesen Ausdruck für ν an Stelle von n in die Gleichung (4a) einsetzt, so erhält man

$$\alpha = \beta \left\{ \frac{n_0}{\cos i} - 1 \right\}.$$

Diese Beziehung ist aber mit Gleichung (IV) identisch.

[18]) Wied. Ann. 42, p. 666. 1891.
[19]) Ber. Berl. Akad. XXXVIII, p. 961. 1890.
[20]) Wied. Ann. 23, p. 132. 1884.
[21]) Pogg. Ann. 92, p. 412. 1854.

21. Die bisherigen Rechnungen sind rein algebraischer Natur und verloren allmählich jegliche physikalische Anschaulichkeit, wenn auch eine solche den ersten Ansätzen der Theorie innegewohnt haben mag. Anlässlich der mit der Prismenmethode schon erhaltenen Resultate hat Herr H. A. Lorentz es versucht, eine direkte Ableitung für diesen Specialfall zu geben, wobei gerade jener Standpunkt möglichst gewahrt wird. Ausgangspunkt dieser bisher unveröffentlichten, mir vom Verfasser gütigst zur Verfügung gestellten Rechnung bilden einige völlig allgemeine und einwandfreie Ansätze, die in einfacher Weise zu einer Formel für die Ablenkung führen, welche mit der Gleichung (II) identisch ist. Dabei wird die wenig elegante Einführung der variablen Function ν völlig umgangen.

22. Um die Gleichungen anzuwenden, braucht man den Werth von g und von n_0. Die Grösse g ist schon von Wernicke[22]) und Rathenau[23]) direkt gemessen worden. Abgesehen von älteren Autoren hat Herr Rubens[24]) sie aus Bestimmungen des Reflexionsvermögens, und Herr Drude[25]) aus Messungen der Reflexionsparameter berechnet. Aus der Gleichung (2) erhält man leicht eine explicite Gleichung für n_0. Ersetzt man in (2) n durch den Ausdruck für ν in (3), so wird

$$n_0 = Q\sqrt{\left(1+\frac{\sin^2 i}{Q^2+g^2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo durch Q die Grösse

$$\frac{\sin(\alpha+\beta-i)+\cos\beta\sin i}{\sin\beta}$$

bezeichnet werden soll. Da bei so spitzen Prismen die Ablenkung direkt proportional dem Prismenwinkel ist, darf man die Mittel aus den Bestimmungen an allen Prismen eines

---

[22]) Pogg. Ann. Erg.-Bd. 8, p. 75. 1878.
[23]) Inaugural-Dissertation. Berlin 1889.
[24]) Wied. Ann. 37, p. 267. 1889.
[25]) Wied. Ann. 39, p. 481. 1890.

jeden Metalls benutzen. In dieser Weise sollte die Wirkung der kleinen Unebenheiten und anderer Unvollkommenheiten der einzelnen Prismen ausgeglichen werden.

Es sind also die in folgende Tabelle eingetragenen Zahlen die für das mittlere Prisma eines jeden Metalls mittelst Gleichung (8) berechneten Werthe von n_0. Die Mittel aus diesen Zahlen müssen der Wirklichkeit besser entsprechen als die Werthe, die man mit Hülfe der Gleichung $\alpha = \beta (n_0 - 1)$ berechnet, der Gleichung, auf welche (I—IV) sich reduciren, wenn i gleich Null ist. Die Tabelle enthält nicht nur die Werthe von n_0 für die Metalle, die ich untersucht habe, sondern auch für Eisen und Kobalt, nach den Beobachtungen der Herren du Bois und Rubens[26]) berechnet. Vorzugsweise habe ich die von Herrn Rathenau[27]) direkt ermittelten Werthe von g benutzt. Wo direkt Bestimmungen fehlten, habe ich die von Herrn Rubens[28]) oder die von Herrn Drude[29]) gebraucht. Die von Herrn Drude berechneten Werthe stimmen sehr gut mit den von Herrn Rubens berechneten überein, dagegen sind die von Herrn Rathenau ermittelten bedeutend kleiner; der Unterschied macht jedoch so wenig in der Berechnung aus, dass man diese oder jene Werthe hätte anwenden können. Man braucht also keinerlei Reduktion wegen der Differenzen der Wellenlängen des von mir und der von den Herren Rathenau, Rubens oder Drude benutzten Lichtgattungen zu machen.

---

[26]) Ber. Berl. Akad. XXXVIII, p. 961. 1890.
[27]) l. c. p. 22.
[28]) l. c.
[29]) l. c.

Tabelle 4.

Incidenz	Gold $g = 2.16$ $\lambda = 0.65\ \mu\mu$ Rathenau	Silber $g = 1.79$ $\lambda = 0.65\ \mu\mu$ Rathenau	Kupfer $g = 2.61$ $\lambda =$ rot. (C) Rubens	Platin $g = 2.03$ $\lambda = 0.65\ \mu\mu$ Rathenau	Nickel $g = 2.06$ $\lambda = 0.65\ \mu\mu$ Rathenau	Eisen $g = 1.78$ $\lambda = 0.65\ \mu\mu$ Rathenau	Kobalt $g = 4.19$ $\lambda = 0.63\ \mu\mu$ Drude
	n_0						
0°	0.27	0.22	0.45	2.01	1.98	3.01	2.99
10°	0.33	0.31	—	—	—	—	—
20°	0.27	0.40	0.48	—	—	—	—
30°	0.22	0.38	0.49	1.90	2.00	3.12	3.12
40°	0.23	0.41	0.50	1.95	2.02	2.98	3.12
50°	0.26	0.38	0.51	2.04	1.96	3.13	3.24
55°	—	—	—	2.02	2.01	3.00	3.35
60°	0.24	0.35	0.46	2.06	2.06	2.99	3.15
65°	—	—	—	1.97	2.02	2.98	3.18
70°	—	—	0.48	—	—	—	—
Mittel	0.26	0.35	0.48	1.99	2.01	3.03	3.16

Man sieht, dass für jedes Metall die Werthe von n_0, aus den verschiedenen Incidenzen berechnet, befriedigend übereinstimmen, ausser bei Silber, wo n_0 aus $i = 0°$ bedeutend kleiner scheint als aus höheren Incidenzen. Jedenfalls lassen die Abweichungen keinerlei Gesetzmässigkeit erkennen.

23. In Tabelle 5 sind die beobachteten und berechneten Werthe von α zusammengestellt. Die als beobachtet bezeichneten Zahlen sind die Mittel aus den einzelnen in Tabelle 3 eingetragenen Zahlen, und die als berechnet bezeichneten sind die mit Hülfe der Gleichungen (Ia), (II), (III) und (IV) berechneten Werthe von α, wenn als β die Mittel aus den brechenden Winkeln der Prismen eines jeden Metalls in Tabelle 3, und als n_0 die Mittel in Tabelle 4 und als g die von Herrn Rathenau und von Herrn Rubens gefundenen Werthe zur Berechnung verwendet sind. In die letzte horizontale Zeile unter jedem Metalle sind die nach der Gleichung (I), also nach dem Snellius'schen Gesetz berechneten Werthe von α eingetragen.

Dass die Helmholtz'sche Theorie in der That die beobachteten Erscheinungen vollständig wiedergiebt, lässt diese Tabelle zweifellos erkennen. Es stimmen die mittelst der Gleichung (Ia) (g nach Rubens oder Drude) berechneten Werthe von α fast genau mit den beobachteten überein. Liegen aber die von Rathenau gefundenen Werthe von g der Rechnung zu Grunde, so ist die Uebereinstimmung nicht so gut, doch sind die Abweichungen immer unter der Grenze der Beobachtungsfehler. Dagegen weichen mit wachsendem i die nach Snellius berechneten Werthe rasch von den beobachteten ab. Es sollte nach Snellius totale Reflexion für Gold bei $15^0\ 5'$, für Silber bei $20^0\ 30'$ und für Kupfer bei $28^0\ 42'$ eintreten. Die Tabelle zeigt weiter, dass die Gleichungen (II), (III) und (IV) bis $i = 70^0$ innerhalb der Beobachtungsfehler als gültig betrachtet werden können.

24. Eine graphische Darstellung dieser Resultate wird wesentlich dadurch erleichtert, dass man die an sämmtlichen Prismen von verschiedenen brechenden Winkeln beobachteten Werthe in der Weise umrechnet, dass sie sich sämmtlich auf denselben brechenden Winkel beziehen; als solchen wählen wir $25''$, weil dieser Werth die Grössenordnung der untersuchten Prismenwinkel charakterisirt.

Die folgende Tabelle 6 enthält die für den fiktiven β von $25''$ berechneten Werthe sowohl für die Metalle Eisen und Kobalt nach den Beobachtungen der Herren du Bois und Rubens, als auch diejenigen für die fünf neu untersuchten Metalle. Die Berechnung nach (Ia) habe ich bis $i = 90^0$ fortgesetzt. In die zweiten Horizontalzeilen eines jeden Tabellenabschnitts sind die wahrscheinlichen Fehler eingetragen. Zur Ermittelung dieser Fehler habe ich den einfachen Satz[30]) von Cornu angewendet, um zu bestimmen, ob dem Gesetz der zufälligen Zahlen Genüge geleistet wurde. Es ergab sich, dass das doppelte Quadrat des mittleren Fehlers dividirt durch das Quadrat des Mittels aller Abweichungen ohne Rücksicht

[30]) Ann. de l'Observatoire de Paris XIII. 1876.

$\lambda = 64 \times 10^{-6}$ c. m.

	Incidenz		0°	10°
Gold $\beta = 25''.7$ $n_0 = 0.26$		α beobachtet	$-18''.9$	-17.2
	α ber.	I a $g = 2.91$ (Rubens)	-19.1	-19.0
		I a, II, III, IV $g = 2.16$ (Rathenau)	-19.1	-19.0
		I Snellius	-19.1	-20.7
Silber $\beta = 18''.1$ $n_0 = 0.35$		α beobachtet	-14.1	-12.4
	α ber.	I a $g = 3.46$ (Rubens)	-11.8	-11.7
		I a, II, III, IV $g = 1.79$ (Rathenau)	-11.8	-11.7
		I Snellius	-11.8	-12.5
Kupfer $\beta = 33''.7$ $n_0 = 0.48$		α beobachtet	-18.5	—
	α ber.	I a, II, III, IV $g = 2.61$ (Rubens)	-17.5	—
		I Snellius	-17.5	—
Platin $\beta = 21''.9$ $n_0 = 1.99$		α beobachtet	$+22.1$	—
	α ber.	I a $g = 4.17$ (Drude)	$+21.7$	—
		I a, II, III, IV $g = 2.03$ (Rathenau)	$+21.7$	—
		I Snellius.	$+21.7$	—
Nickel $\beta = 30''.1$ $n_0 = 2.01$		α beobachtet	$+29.8$	—
	α ber.	I a $g = 3.79$ (Rubens)	$+30.4$	—
		I a, II, III, IV $g = 2.06$ (Rathenau)	$+30.4$	—
		I Snellius	$+30.4$	—

Tabelle 5.

20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°
— 18.4	— 19.4	— 18.2	— 15.6	—	— 14.3	—	—
— 18.7	— 18.2	— 17.2	— 15.2	—	— 13.0	—	—
— 18.8	— 18.4	— 17.6	— 16.2	—	— 13.6	—	—
— 18.8	— 18.4	— 17.5	— 16.0	—	— 13.4	—	—
— 18.8	— 18.4	— 17.5	— 16.0	—	— 13.5	—	—
— 18.6	— 18.0	— 17.0	— 15.3	—	— 12.4	—	—
Totale Reflexion	—	—	—	—	—	—	—
— 10.4	— 10.1	— 8.7	— 7.7	—	— 5.5	—	—
— 11.4	— 10.8	— 9.9	— 8.3	—	— 5.5	—	—
— 11.7	— 11.4	— 10.9	— 10.8	—	— 7.4	—	—
— 11.6	— 11.2	— 10.5	— 9.3	—	— 6.7	—	—
— 11.6	— 11.2	— 10.6	— 9.4	—	— 6.9	—	—
— 11.4	— 10.8	— 9.9	— 8.3	—	— 5.4	—	—
— 16.7	Totale Reflexion	—	—	—	—	—	—
— 16.5	— 15.0	— 12.4	— 7.8	—	— 4.3	—	+ 10.7
— 16.6	— 15.4	— 13.2	— 9.5	—	— 3.1	—	+ 10.7
— 16.6	— 15.4	— 13.1	— 9.3	—	— 3.0	—	+ 10.9
— 16.6	— 15.4	— 13.1	— 9.4	—	— 3.2	—	+ 10.8
— 16.5	— 15.0	— 12.6	— 8.5	—	— 1.3	—	+ 13.6
— 21.6	Totale Reflexion	—	—	—	—	—	—
—	+ 25.9	+ 33.4	+ 46.5	+ 54.0	+ 66.6	+ 75.5	—
—	+ 28.1	+ 34.4	+ 44.9	+ 52.8	+ 65.8	+ 79.1	—
—	+ 27.2	+ 32.5	+ 40.2	+ 48.4	+ 60.4	+ 71.7	—
—	+ 27.2	+ 32.5	+ 42.4	+ 48.9	+ 60.9	+ 73.0	—
—	+ 27.2	+ 32.5	+ 42.4	+ 48.9	+ 60.9	+ 72.5	—
—	+ 28.3	+ 34.9	+ 45.8	+ 54.0	+ 67.4	+ 81.1	—
—	+ 26.8	+ 31.9	+ 40.6	+ 47.2	+ 56.5	+ 69.8	—
—	+ 39.3	+ 48.3	+ 60.4	+ 73.6	+ 91.3	+ 110.6	—
—	+ 39.3	+ 48.1	+ 62.5	+ 73.5	+ 88.4	+ 109.9	—
—	+ 39.3	+ 48.0	+ 62.1	+ 72.5	+ 86.3	+ 106.2	—
—	+ 39.3	+ 48.0	+ 62.2	+ 72.8	+ 87.1	+ 107.3	—
—	+ 39.3	+ 48.0	+ 62.2	+ 72.8	+ 87.1	+ 106.7	—
—	+ 39.8	+ 48.9	+ 64.1	+ 75.4	+ 91.0	+ 113.1	—
—	+ 37.6	+ 44.8	+ 56.9	+ 66.3	+ 79.2	+ 97.7	—

$\lambda = 64 \times 10^{-6}$ c. m.

	Incidenz		0°	10°	20°
Gold	α beobachtet		— 18″.3	— 16·7	— 17·8
	Wahrscheinliche Fehler		± 1″.2	1·1	1·9
$\beta = 25''$.	α berechnet	Ia	— 18.5	— 18·4	— 18·2
$n_0 = 0{\cdot}26$		II	— 18.5	— 18·4	— 18·2
g = 2·16 (Rathenau)		III	— 18.5	— 18·4	— 18·2
		IV	— 18.5	— 18·4	— 18·1
		I	— 18.5	— 20·1	Tot. Reflex.
Silber	α beobachtet		— 19.5	— 17.2	— 14.3
	Wahrscheinliche Fehler		± 1.5	1.3	1.5
$\beta = 25''$	α berechnet	Ia	— 16.2	— 16.2	— 16.1
$n_0 = 0{\cdot}35$		II	— 16.2	— 16.1	— 15.9
g = 1·79 (Rathenau)		III	— 16.2	— 16.1	— 15.9
		IV	— 16.2	— 16.1	— 15.7
		I	— 16.2	— 17.3	— 23.0
Kupfer	α beobachtet		— 13.7	—	— 12.2
	Wahrscheinliche Fehler		± 1.1	—	1.9
$\beta = 25''$	α berechnet	Ia	— 13.0	—	— 12.3
$n_0 = 0{\cdot}48$		II	— 13.0	—	— 12.3
g = 2·61 (Rubens)		III	— 13.0	—	— 12.3
		IV	— 13.0	—	— 12.2
		I	— 13.0	—	— 16.0
Platin	α beobachtet		+ 25.2	—	—
	Wahrscheinliche Fehler		± 1.1	—	—
$\beta = 25''$	α berechnet	Ia	+ 24.8	—	—
$n_0 = 1.99$		II	+ 24.8	—	—
g = 2.03 (Rathenau)		III	+ 24.8	—	—
		IV	+ 24.8	—	—
		I	+ 24.8	—	—
Nickel	α beobachtet		+ 24.7	—	—
	Wahrscheinliche Fehler		± 1.2	—	—
$\beta = 25''$	α berechnet	Ia	+ 25.2	—	—
$n_0 = 2{,}01$		II	+ 25.2	—	—
g = 2,06 (Rathenau)		III	+ 25.2	—	—
		IV	+ 25.2	—	—
		I	+ 25.2	—	—
Eisen.	α beobachtet		+ 50.2	—	—
	α berechnet	Ia	+ 50.7	—	—
$\beta = 25''$		II	+ 50.7	—	—
$n_0 = 3{,}02$		III	+ 50.7	—	—
g = 1,78 (Rathenau)		IV	+ 50.7	—	—
		I	+ 50.7	—	—
Kobalt	α beobachtet		+ 49.9	—	—
	α berechnet	Ia	+ 54.0	—	—
$\beta = 25''$		II	+ 54.0	—	—
$n_0 = 3{,}16$		III	+ 54.0	—	—
g = 4,19 (Drude)		IV	+ 54.0	—	—
		I	+ 54.0	—	—

Tabelle 6.

30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°	80°	90°
— 18.8	— 17.6	— 15.2	—	— 13.9	—	—	—	—
1.2	1.6	1.4	—	0.8	—	—	—	—
— 17.8	— 17.2	— 15.8	—	— 13.2	—	— 7.9	+ 7.5	+1546.0
— 17.8	— 17.1	— 15.6	—	— 12.9	—	— 7.4	+ 8.8	∞
— 17.8	— 17.1	— 15.6	—	— 13.0	—	— 7.8	+ 8.6	∞
— 17.6	— 16.5	— 14.9	—	— 12.0	—	— 6.0	+ 12.4	∞
—	—	—	—	—	—	—	—	—
— 13.9	— 11.6	— 10.5	—	— 7.6	—	—	—	—
1.9	1.2	1.2	—	1.5	—	—	—	—
— 15.6	— 14.7	— 13.0	—	— 9.3	—	— 3.0	+ 17.8	+1867.0
— 15.4	— 14.4	— 12.5	—	— 8.8	—	— 2.4	+ 18.1	∞
— 15.4	— 14.5	— 12.7	—	— 9.1	—	— 2.8	+ 18.1	∞
— 15.1	— 13.6	— 11.5	—	— 7.6	—	+ 0.6	+ 24.4	∞
Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—	—	—
— 11.1	— 9.2	— 5.8	—	— 3.2	—	+ 7.9	—	—
1.2	1.2	1.2	—	1.2	—	2.7	—	—
— 11.4	— 9.9	— 7.3	—	— 2.5	—	+ 7.5	+ 38.3	+2118.0
— 11.4	— 9.8	— 7.1	—	— 2.2	—	+ 7.9	+ 39.4	∞
— 11.4	— 9.8	— 7.2	—	— 2.4	—	+ 7.7	+ 38.9	∞
— 11.1	— 9.3	— 6.3	—	— 1.0	—	+ 10.1	+ 44.1	∞
Tot. Reflex.	—	—	—	—	—	—	—	—
+ 29.6	+ 38.1	+ 53.1	+ 61.8	+ 76.1	+ 88.6	—	—	—
2.3	2.4	1.6	1.6	1.5	4.2	—	—	—
+ 31.2	+ 37.4	+ 48.2	+ 56.0	+ 69.5	+ 82.3	+ 107.4	+ 237.0	+4227,0
+ 31.2	+ 37.4	+ 48.4	+ 56.5	+ 70.0	+ 83.9	+ 109.7	+ 244.8	∞
+ 31.2	+ 37.4	+ 48.4	+ 56.5	+ 70.0	+ 83.9	+ 109.7	+ 244.3	∞
+ 32.4	+ 39.9	+ 52.4	+ 61.7	+ 77.0	+ 92.7	+ 120.4	+ 261.5	∞
+ 30.6	+ 36.5	+ 46.4	+ 54.0	+ 64.6	+ 79.8	+ 103.1	+ 223.0	+4187.0
+ 32.6	+ 40.2	+ 50.1	+ 61.1	+ 75.8	+ 91.8	—	—	—
1·2	1.5	1.9	2,2	2.8	3.6	—	—	—
+ 32.6	+ 39.8	+ 51.5	+ 60.1	+ 71.4	+ 87.6	+ 112.6	+ 246.7	+4474.0
+ 32.6	+ 39.8	+ 51.6	+ 60.4	+ 72.2	+ 88.7	+ 114.6	+ 251.5	∞
+ 32.6	+ 39.8	+ 51.6	+ 60.4	+ 72.2	+ 88.7	+ 114.6	+ 248.4	∞
+ 33.0	+ 40.6	+ 53.2	+ 62.6	+ 75.5	+ 93.9	+ 121.9	+ 264.4	∞
+ 31.2	+ 37.2	+ 47.2	+ 55.0	+ 65.7	+ 81.1	+ 104.7	+ 227.0	+4220.0
+ 64.9	+ 71.3	+ 95.8	+ 104.4	+ 122.3	+ 149.7	—	—	—
+ 62.1	+ 72.7	+ 90.6	+ 103.4	+ 121.3	+ 146.3	+ 184.6	+ 391.0	+5526.0
+ 62.1	+ 72.7	+ 90.8	+ 103.7	+ 121.9	+ 147.3	+ 186.2	+ 394.9	∞
+ 62.1	+ 72.7	+ 90.8	+ 103.7	+ 121.9	+ 147.3	+ 186.2	+ 394.0	∞
+ 62.5	+ 73.9	+ 92.8	+ 107.0	+ 126.5	+ 154.2	+ 196.5	+ 411.0	∞
+ 61.2	+ 71.6	+ 88.9	+ 101.7	+ 119.5	+ 145.0	+ 184.0	+ 385.0	+5406.0
+ 64.8	+ 76.5	+ 100.1	+ 119.7	+ 131.3	+ 161.4	—	—	—
+ 65.9	+ 77.6	+ 97.0	+ 111.6	+ 131.3	+ 159.3	+ 202.1	+ 422.0	+5655.0
+ 65.9	+ 77.6	+ 97.1	+ 111.7	+ 131.7	+ 160.2	+ 203.7	+ 425.7	∞
+ 65.9	+ 77.6	+ 97.1	+ 111.7	+ 131.7	+ 160.2	+ 203.7	+ 425.1	∞
+ 66.2	+ 78.1	+ 97.9	+ 112.7	+ 133.0	+ 161.9	+ 205.9	+ 429.9	∞
+ 65.1	+ 75.9	+ 94.8	+ 108.0	+ 126.5	+ 152.7	+ 193.5	+ 404.0	+5533.0

auf das Vorzeichen sehr wenig von der Zahl π in den meisten Fällen abweicht.

Zur graphischen Darstellung dieser Resultate wurden als Abscissen auf den x-Achsen Strecken aufgetragen, welche den Incidenzen 10^0, 20^0 . . . . . entsprechen. Dann dienen die Ablenkungen α als Ordinaten. Zeichnet man nun nach diesen Angaben die theoretischen Kurven, und bezeichnet man die entsprechenden Punkte der Beobachtungen durch Ellipsen, deren längere Achsen proportional der wahrscheinlichen Fehler sind, so ergiebt sich, dass die nach der Gleichung (Ia) gezeichneten theoretischen Kurven fast immer die Ellipsen schneiden, d. h. die beobachteten Werthe weichen von den mittelst der Gleichung (Ia) berechneten innerhalb der Fehlergrenze ab.

25. Der Gang der Funktion ν kann nun mit Hülfe von (3) oder (7) bestimmt werden. In Tabelle 7 sind die Werthe von ν nach (3), also nach der Helmholtz'schen Theorie berechnet, eingetragen. Die nach (7), also nach der Beer'schen Gleichung berechneten, unterscheiden sich von den nach (3) nur, falls n_0 gross ist und dann nur in der zweiten Decimalstelle.

Aus Tabelle 7 geht hervor, dass der Verlauf des Brechungsverhältnisses ein solcher ist, dass bei Gold, Silber und Kupfer keine totale Reflexion eintreten kann. In der That erreicht der Brechungsindex für Kupfer schon bei 65^0 den Werth Eins und wächst bei höherer Neigung langsamer und langsamer, so dass die Ablenkung in der Nähe von $i = 65^0$ einen Wechsel des Vorzeichens erfahren sollte, was, wie man erkennt, der Wirklichkeit entspricht. Der Uebergang von minus zu plus bei Gold und Silber sollte erst bei Neigungen stattfinden, welche grösser als 70^0 sind, bei welchen Beobachtungen aus praktischen Gründen nicht mehr angestellt werden können.

26. Bei der Vergleichung der experimentellen Resultate mit den theoretischen Ergebnissen habe ich mich auf die Theorie von Herrn von Helmholtz beschränkt. Aus diesem Vergleich muss man auf Grund der Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe schliessen, dass

Tabelle 7.

Incidenz	0°	10°	20°	30°	40°	50°	55°	60°	65°	70°	80°	90°
	ν bei $\lambda = 64 \times 10^{-6}$ c. m.											
Gold g = 2.16 Rathenau	0.26	0.34	0.43	0.56	0.69	0.80	—	0.90	—	0.97	1.01	1.03
Silber g = 1.79 Rathenau	0.35	0.39	0.49	0.61	0.73	0.84	—	0.93	—	1.00	1.04	1.06
Kupfer g = 2.61 Rubens	0.48	—	0.59	0.69	0.80	0.90	—	0.98	—	1.05	1.09	1.10
Platin g = 2.03 Rathenau	1.99	—	—	2.05	2.08	2.11	2.13	2.14	2.15	2.16	2.18	2.19
Nickel g = 2.06 Rathenau	2.01	—	—	2.06	2.09	2.12	2.14	2.15	2.16	2.18	2.19	2.20
Eisen g = 1.78 Rathenau	3.03	—	—	3.07	3.09	3.10	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.15
Kobalt g = 4.19 Drude	3.16	—	—	3.19	3.21	3.22	3.23	3.25	3.26	3.27	3.28	3.28

diese Theorie wohl geeignet ist, die beobachteten Thatsachen zutreffend wiederzugeben. Dass die Ergebnisse der Cauchy'schen, Lorentz'schen und der Voigt'schen Theorien sich nicht sehr von denen der Helmholtz'schen unterscheiden, erkennt man durch einen Blick auf Tabelle 5, da von den Gleichungen (II—IV) (II) aus der Lorentz'schen, (III) aus der Voigt'schen, und (IV) aus der Cauchy'schen hergeleitet werden können.

Bezüglich der Theorien von Lommel[31]), Ketteler[32]) u. A., die nur als Erweiterungen der Helmholtz'schen zu betrachten sind, ist es zu erwarten, dass auch dort die Uebereinstimmung eine den Versuchsfehlern entsprechend vollkommene ist.

---

[31]) Wied. Ann. 3, p. 339. 1878.
[32]) Wied. Ann. 7, p. 658. 1879.

Die Dispersion.

27. Herr Kundt[1]) hat schon in seiner Mittheilung die Dispersion bezüglich weissen, rothen und blauen Lichtes für die oben untersuchten Metalle angegeben; um aber die Dispersion in Bezug auf bestimmte Wellenlängen zu ermitteln, habe ich mich eines Verfahrens bedient, ähnlich demjenigen, welches die Herren du Bois und Rubens[2]) für Eisen, Nickel und Kobalt schon angewandt haben. Eine nähere Beschreibung darf ich unterlassen. Die Ergebnisse der Messungen bei normaler Incidenz für die Linien L_α, D, F und G sind in der Tabelle zusammengestellt. Die Zahlen sind die Mittel der von sämmtlichen Prismen eines jeden Metalls erhaltenen Werthe, welche mittelst der Gleichung

$$n_0 = 1 + \frac{\alpha}{\beta}$$

berechnet wurden.

Tabelle 8.

	Li_α	D	F	G
	n_0			
Gold	0.29	0.66	0.82	0.93
Silber	0.25	0.27	0.20	0.27
Kupfer	0.35	0.60	1.12	1.13
Platin	2.02	1.76	1.63	1.41

[1]) Wied. Ann. 34, p. 482. 1888.
[2]) Ber. Berl. Akad. XXXVIII, p. 965. 1890.

Ein Vergleich dieser Resultate mit den von Herrn Kundt gefundenen zeigt, soweit die unbestimmten Wellenlängen des von ihm benutzten Lichtes es erlauben, eine sehr gute Uebereinstimmung. Bei Silber erscheinen sehr kleine Schwankungen von dem Werthe von n_0, welche an die von Jamin[3]) erhaltenen erinnern. Es wäre sehr wünschenswerth, diese Zahlen zur weiteren Prüfung der Helmholtz'schen Dispersionstheorie anzuwenden. Der erheblichen Absorption wegen sind aber diese Zahlen vermuthlich so fehlerhaft, dass ihre Anwendung nicht zulässig wäre. Eine solche Prüfung können wir erst vornehmen, wenn wir genauere Messungen erhalten haben.

Zum Schlusse möchte ich nicht unterlassen, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Kundt, für die mir freundlichst gewährte Belehrung und Unterstützung, sowie dem Herrn Privat-Docent Dr. Rubens und Herrn Dr. du Bois für die speciell bei dieser Arbeit geleistete Hülfe und Anregung meinen tiefgefühlten Dank auszusprechen.

---

[3]) Beer, Pogg. Ann. 92, p. 417. 1854.

Thesen.

I.

Die Michelson'sche Methode, die Wellenlänge des Lichtes zu messen, ist den früheren Methoden vorzuziehen.

II.

Der ringbildende Process der Laplace'schen Nebelhypothese bestätigt sich nicht in der Entwickelung der Sternsysteme.

III.

Der Physiker muss auch mit den Gesetzen der Physiologie der Sinne vertraut sein.

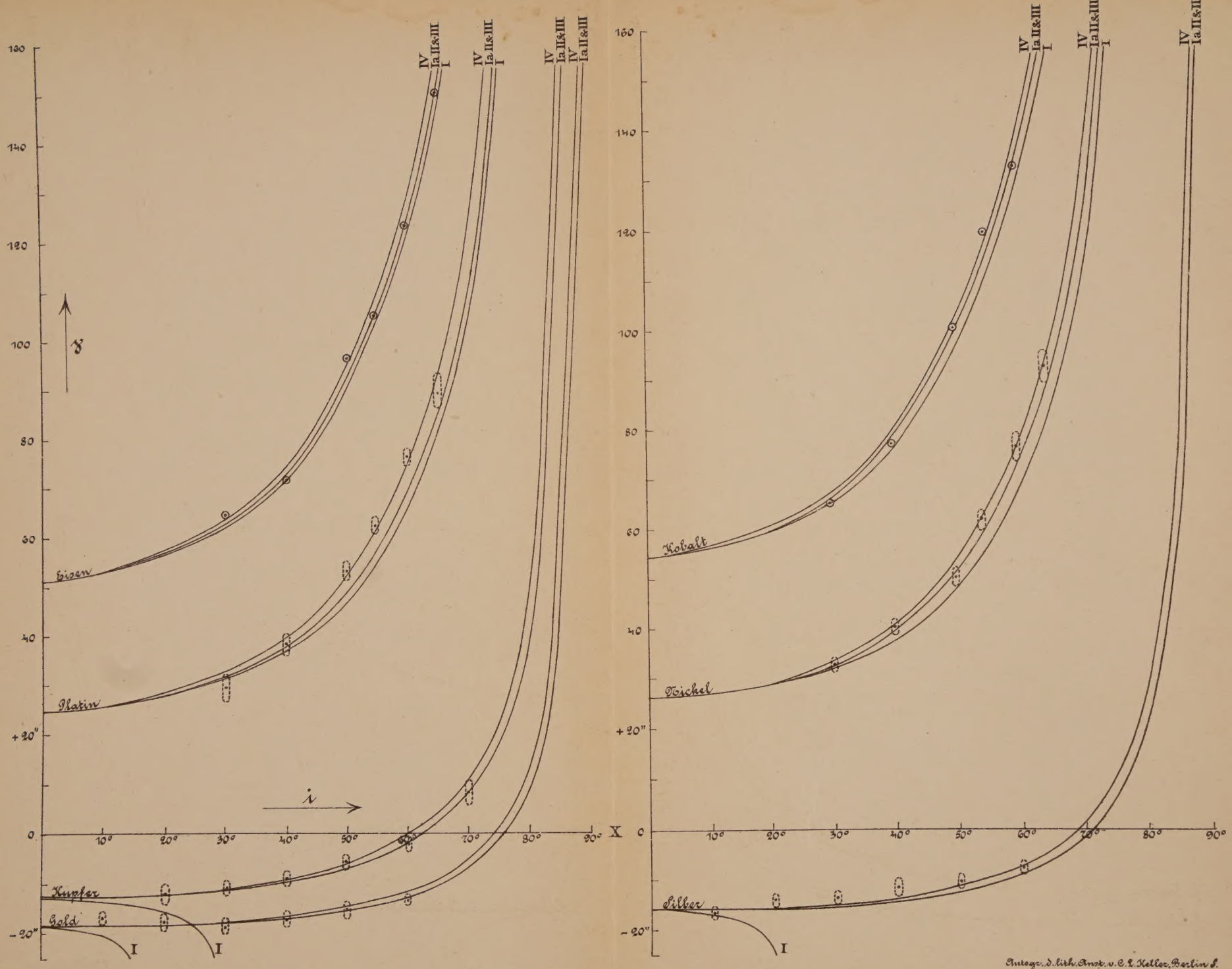
Vita.

Natus sum Daniel Guilelmus Shea Portsmouthii in civitate Neohametensi reipublicae americanae die XXVII mensis Novembris a. h. s. LIX patre Timotheo matre Margaretha e gente MacCarthy. Fidei addictus sum catholicae.

Primis litterarum elementis imbutus scholas publicas et academiam adii quae vocatur „Brackett“ prope Bostonem sitam. Maturitatis testimonium a. h. s. LXXX adeptus atque anno LXXXII inter cives universitatis Harvardianae Cantabrigensis receptus studiis litterariis, philosophicis, mathematicis, physicis, chymicis incubui per septem annos, ad gradum Baccalaurei a. h. s. LXXXVI et Magistri Artium a. h. s. LXXXVIII admissus sum. Anno h. s. LXXXVII in Senatum reipublicae Neohametensis electus sum. Anno h. s. LXXXIX ad universitatem Berolinensem accessi cujus civis usque ad hoc tempus studiis physicis, mathematicis, philosophicis operam dedi.

Docuerunt me viri illustrissimi Lovering, Gibbs, Trowbridge, B. O. Peirce, Hall, Whiting, J. M. Peirce, Byerly, White, Cooke, H. B. Hill, Huntington, Dyer, Hawes, A. S. Hill, Wendell, Briggs, Clymer, Mark, Lutz, Harvardiani; de Helmholtz, Kundt, Zeller, Berolini.

Quibus viris optime de me meritis, imprimis autem viro clarissimo Kundt gratias ago quam maximas.



Anstalt d. lith. Anst. v. C. L. Keller, Berlin S.